DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Bachelorafhandling

Søren Bredlund Caspersen

Kuglefunktioner

Vejleder: Christian Berg

Afleveret den: 26/01/2006

Indhold

1 Resume **2**

1.1 English abstract 2

1.2 Dansk resume 2

2 Definition af kuglefunktionerne **3**

3 Legendre polynomiet **7**

3.1 Rodrigues fremstilling 14

3.2 Laplaces første integral 16

3.3 Legendre polynomiet som løsning til differential ligning 16

4 Legendre polynomiet som hypergeometrisk funktion **17**

5 Rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ udspænder $L^2(S^{q-1})$ **18**

6 Funk-Heckes sætning **22**

7 De associerede kuglefunktioner **23**

7.1 De associerede Legendre funktioner 23

7.2 De associerede run 24

8 Laplace-Beltrami operatoren, $\triangle^*_{(q-1)}$ **27**

9 Litteraturliste **30**

1 Resume

1.1 English abstract

This project contains a definition of the spherical harmonics as the restriction of certain polynomials to the unit sphere and of the Legendre polynomials. Presented are, among other things, two alternative representaions of the Legendre polynomials, namely the Rodrigues representaion and a representation by Legendres first integral. It is shown that the Lengendre polynomials are hypergeometric functions. The associated Legendre functions are introduced and it is shown that the spherical harmonics for a given dimension, q, can be constructed by the spherical harmonics of dimension $q-1$ and the associated Legendre functions. Furthermore it is shown that the spherical harmonics span the space of square integrable functions on the unit sphere. Finally the spherical harmonics are considered as eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator.

1.2 Dansk resume

Dette projektet indeholder en definition af kuglefunktionerne givet ved begrænsningen af visse polynomier til enhedskugleoverfladen og af Legendre polynomierne. Der gives bl.a. to alternative repræsentationer af Legendre polynomierne, nemlig Rodrigues repræsentaion og en repræsentaion ved Legendres første integral. Det vises at Legendre polynomierne er hypergeometriske funktioner. De associerede Legendre funktioner indføres og det vises at kuglefunktionerne i en given dimension, q, kan konstrueres vha. kuglefunktionerne i dimension $q-1$ og de associerede Legendre funktioner. Desuden vises at kuglefunktionerne udspænder rummet bestående af de kvadratintegrable funktioner på enhedskuglen. Endelig betragtes kuglefunktionerne som egenfunktioner til Laplace-Beltrami operatoren.

2 Definition af kuglefunktionerne

Med sædvanlig notation vil $\mathbb{R}^q$ betegne det q-dimensionale euklidiske rum med den sædvanlige basis givet ved

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varepsilon_q &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{1}$$

Elementer i dette rum vil være givet som vektorer

$$x = x_{(q)} = (x_1, \ldots, x_q) = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_q\varepsilon_q = x_{(q-1)} + x_q\varepsilon_q,$$

hvor $x_{(q-1)}$ specielt i den sidste fremstilling skal forstås som element i $\mathbb{R}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$. Med det sædvanlige skalarprodukt givet ved

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q \tag{2}$$

fås en norm på $\mathbb{R}^q$

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_q^2} \tag{3}$$

Enhedskugleoverfladen i $\mathbb{R}^q$ betegnes med S^{q-1} og består af de elementer i $\mathbb{R}^q$ der har norm en. Alle elementer i $\mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ kan repræsenteres entydigt ved deres norm og et element på enhedskugleoverfladen. For $x \in \mathbb{R}^q$, $|x| \in]0, \infty[$ og $\xi \in S^{q-1}$ bliver denne repræsentation

$$x = |x|\xi \tag{4}$$

Elementer på enhedskugleoverfladen kan også med fordel beskrives ved en parameter, t, og et element i S^{q-2}. Til hvert $\xi_{(q)} \in S^{q-1}$ gælder, at der entydigt findes et $t \in [-1, 1]$ og et $\xi_{(q-1)} \in S^{q-2}$ så

$$\xi_{(q)} = t\varepsilon_q + \sqrt{1 - t^2}\xi_{(q-1)} \tag{5}$$

Dette kan bl.a. benyttes til, at lette udregningen af integraler over enhedskugleoverfladen ved at gå fra et integral over S^{q-1} til et integral over S^{q-2} og $[-1, 1]$. Disse overgange benyttes adskillige gange senere i projektet. Disse kan også bruges til at bestemme størrelsen af den q dimensionale kugleoverflade og man finder (se f.eks. [2] s. 7):

$$|S^{q-1}| = 2\frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \tag{6}$$

Selvom mange af resultaterne om kuglefunktioner også gælder i én og to dimensioner, vil det generelt i resten af projektet antages, at dimensionen, q, opfylder $q \geq 3$. For $q = 2$ vil mange af resultaterne have velkendte trigonometriske formuleringer, og for $q = 1$ bliver teorien ikke så interessant, da der kun er to elementer på "enhedskugleoverfladen" i en dimension, nemlig $\{\pm 1\}$. Dette gøres bl.a. for, at undgå, at skulle tage højde for en masse uinteressante specialtilfælde.
For kvadratintegrable funktioner på enhedskugleoverfladen, $f, g \in L^2(S^{q-1})$ – og altså specielt for kontinuerte funktioner på enhedskugleoverfladen – indføres skalarproduktet

$$< f, g > := \int_{S^{q-1}} f(\xi)\overline{g(\xi)} dS^{q-1}(\xi) \tag{7}$$

og de velkendte normer

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{\xi \in S^{q-1}} |f(\xi)| \tag{8}$$

$$\|f\|_2 := \Big(\int_{S^{q-1}} |f(\xi)|^2 dS^{q-1}(\xi) \Big)^{1/2} = \sqrt{< f, f >} \tag{9}$$

Definition 2.1 (De homogene polynomier) *Ved de homogene polynomier af grad n i q dimensioner, $\mathcal{H}_n(q)$, forstås polynomier, $H_n : \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$, der opfylder $H_n(x) = H_n(r\xi) = r^n H_n(\xi)$ for $x = r\xi$ med $\xi \in S^{q-1}$.*

Definition 2.2 (Kuglefunktionerne) *$Y_n(q; \cdot) : S^{q-1} \to \mathbb{C}$ kaldes en kuglefunktion af grad n i q dimensioner, hvis der findes et homogent polynomium af grad n, $H_n(x)$, der opfylder $\triangle H_n = 0$, så $Y_n(q; \xi)$ er restriktionen af $H_n(x)$ på enhedskugleoverfladen. Altså hvis $Y_n(q; \xi)$ og $H_n(x) \in \mathcal{H}_n(q)$ med $x = r\xi$ opfylder:*

$$H_n(x) = r^n H_n(\xi) = r^n Y_n(q; \xi), \quad \textit{hvor } \triangle H_n = 0 \tag{10}$$

Rummet af alle kuglefunktioner af grad n på enhedskugleoverfladen i q dimensioner betegnes $\mathcal{Y}_n(q)$.

Med notationen f_A skal forstås, for givet $f \in L^2(S^{q-1})$ og $A \in O_{(q)}$, $f_A(\xi) := f(A\xi)$.

Definition 2.3 (Invariant rum) *Et lineært underrum $\mathcal{L}$ af $C(S^{q-1})$ kaldes invariant, hvis der for alle $A \in O_{(q)}$ gælder $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f_A \in \mathcal{L}$.*

Rummet af alle kuglefunktioner af grad n på enhedskugleoverfladen i q dimensioner er invariant, da der gælder $\triangle f = 0 \Rightarrow \triangle f_A = 0$ for alle $A \in O_{(q)}$.
Dimensionen af $\mathcal{Y}_n(q)$ begtegnes $N(q,n)$. Det kan vises at $N(q,n)$ for $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ opfylder

$$\frac{1+z}{(1-z)^{q-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} N(q,n) z^n \tag{11}$$

og er givet ved:

$$N(q,n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ q & \text{for } n = 1 \\ \frac{(2n+q-2)(n+q-3)!}{n!(q-2)!} & \text{for } n \geq 2 \end{cases}$$

Lemma 2.4 *Hvis $Y \in \mathcal{Y}_n(q)$ så gælder også $\overline{Y} \in \mathcal{Y}_n(q)$. Specielt kan der altid findes en basis bestående af funktioner med reelle funktionsværdier.*

Bevis: At $\overline{Y}$ ligger i $\mathcal{Y}_n(q)$, når Y ligger der, er oplagt. Givet en basis bestående af $N(q,n)$ komplekse funktioner, U_k, skabes en basis af reelle funktioner ved, for hvert element, U_k, i den komplekse basis, at benytte $U_k\overline{U_k}$.

□

Da alle $H_n \in \mathcal{H}_n(q)$ kan skrives på følgende form,

$$H_n(x_1,\ldots,x_q) = \sum_{k=0}^{n} x_q^k h_{n-k}(x_1,\ldots,x_{q-1}) = \sum_{k=0}^{n} x_q^k h_{n-k}(x_{(q-1)}), \tag{12}$$

hvor $h_{n-k} \in \mathcal{H}_{n-k}(q-1)$, kan de homogene polynomier, der opfylder $\triangle H_n = 0$, nu bestemmes, når bare f.eks. h_n og h_{n-1} i ovenstående fremstilling kendes. Da nemlig $\triangle_{(q)} = \triangle_{(q-1)} + \left(\frac{\partial}{\partial x_q}\right)^2$ ses at for $\triangle H_n = 0$ gælder også:

$$\begin{aligned} \triangle H_n(x_1,\ldots,x_q) &= \textstyle\sum_{k=0}^n x_q^k \triangle_{(q-1)} h_{n-k}(x_{(q-1)}) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_q}\right)^2 x_q^k h_{n-k}(x_{(q-1)}) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n x_q^k \triangle_{(q-1)} h_{n-k}(x_{(q-1)}) + \sum_{k=0}^n k(k-1) x_q^{k-2} h_{n-k}(x_{(q-1)}) \end{aligned} \tag{13}$$

Da $\triangle_{(q-1)} h_j = 0$ for $j \leq 1$ fås altså:

$$\triangle H_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x_q^k \triangle_{(q-1)} h_{n-k}(x_{(q-1)}) + \sum_{k=2}^{n} k(k-1) x_q^{k-2} h_{n-k}(x_{(q-1)}) = 0 \tag{14}$$

Så ved at betragte hver potens af x_q, fås følgende krav, der skal være opfyldt for alle $k \in \{0, \cdots, n-2\}$

$$\triangle_{q-1} h_{n-k}(x_{(q-1)}) + (k+2)(k+1) h_{n-k-2}(x_{(q-1)}) = 0. \tag{15}$$

Så når først h_n og h_{n-1} i fremstillingen givet ved (12) er bestemt, er resten entydigt givet vha. (15).

3 Legendre polynomiet

For at konstruere Legendre polynomiet er det nyttigt at betragte visse rotationer og spejlinger, der genereres af elementerne i $O_{(q)}$.

Definition 3.1 *Isotropigruppen for et givet element $\alpha \in S^{q-1}$ er*

$$J_{q,\alpha} := \{A | A \in O_{(q)}, A\alpha = \alpha\}. \tag{16}$$

Nu indføres funktionen $L_n(q;\cdot) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, der har 3 følgende egenskaber og det ses at funktionen er entydigt bestemt.

1. $L_n(q; x_1, \dots, x_q)$ er et homogent polynomium af grad n og $\triangle L_n = 0$.
2. For alle $A \in J_{q,\varepsilon_q}$ gælder at $L_n(q; Ax) = L_n(q; x)$.
3. $L_n(q; \varepsilon_q) = 1$.

Da $L_n(q;\cdot) \in \mathcal{H}_n(q)$ findes der en entydig fremstilling som givet i (12). Af det andet krav følger at for alle h_j i denne fremstilling må gælde $h_j(Ax_{(q-1)}) = h_j(x_{(q-1)})$ for $A \in O_{(q-1)}$, altså er h_j konstant på alle kugleoverflader, da der for alle $x_{(q-1)}$ og $y_{(q-1)}$, med $|x_{(q-1)}| = |y_{(q-1)}|$, findes et $A \in O_{(q-1)}$ så $Ax_{(q-1)} = y_{(q-1)}$. h_j afhænger altså kun af normen $|x_{(q-1)}|$. Altså for alle ulige j er $h_j = 0$. Så h_j kan gives ved konstanter $c_{\frac{j}{2}}$:

$$h_{n-k} = c_{\frac{n-k}{2}} x_{(q-1)}^{n-k}, \qquad \text{hvor } c_{\frac{n-k}{2}} = 0 \text{ for } n-k \text{ ulige}$$

$L_n(q;\cdot)$ kan altså udtrykkes ved $L_n(q;x) = \sum_{k=0}^{n} x_q^k c_{\frac{n-k}{2}} x_{(q-1)}^{n-k}$, men dette kan med $n - k = 2l$ omskrives til

$$L_n(q;x) = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} c_l x_q^{n-2l} x_{(q-1)}^{2l} \tag{17}$$

Nu fås med

$$\triangle_{(q-1)}(x_{(q-1)})^{2l} = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 (x_{(q-1)}^2)^l = \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{q-1} 4l(l-1)(x_{(q-1)}^2)^{l-2} x_k^2 + 2l(x_{(q-1)}^2)^{l-1} = 2l(q-3+2l)(x_{(q-1)}^2)^{l-1} \tag{19}$$

og fra (15) følgende udtryk for c_l og c_{l-1}:

$$\triangle_{(q-1)} h_{n-k}(x_{(q-1)}) + (k+2)(k+1) h_{n-k-2}(x_{(q-1)}) = \tag{20}$$

$$\triangle_{(q-1)} c_l x_{(q-1)}^{2l} + (k+2)(k+1) c_{\frac{n-k-2}{2}} x_{(q-1)}^{2l-2} = \tag{21}$$

$$2l(2l+q-3) c_l x_{(q-1)}^{2l-2} + (n-2l+2)(n-2l+1) c_{l-1} x_{(q-1)}^{2l-2} = 0 \tag{22}$$

Da ovenstående skal gælde for alle $x_{(q-1)}$ fås med overgangen $l \to l+1$ altså følgende sammenhæng mellem c_l og c_{l+1}:

$$(2l+2)(2l+q-1) c_{l+1} + (n-2l)(n-2l-1) c_l = 0 \tag{23}$$

Fra krav nr. 3 bestemmes nu c_0. Da $x = \varepsilon_q$ svare til $x_{(q-1)} = 0$ og $x_q = 1$ fås $L_n(q; \varepsilon_q) = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} c_l x_{(q-1)}^{2l} x_q^{n-2l} = c_0 = 1$.
Nu kan det bekræftes at

$$c_l = \left(-\frac{1}{4}\right)^l \frac{n!\Gamma(\frac{q-1}{2})}{l!(n-2l)!\Gamma(\frac{q-1}{2}+l)} \tag{24}$$

Det verificeres let at kravet $c_0 = 1$ er opfyldt. Fra (23) fås

$$c_{l+1} = -\frac{(n-2l)(n-2l-1)}{(2l+2)(2l+q-1)} c_l$$

og så følger det ønskede fra $\frac{(n-2l)(n-2l-1)}{(n-2l)!} = \frac{1}{(n-2l-2)!}$ og regnereglerne for Γ funktionen.
Ovenstående overvejelser giver nu anledning til følgende sætning

Sætning 3.2 *Der findes en entydigt bestemt funktion, $L_n(q;\cdot) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, givet ved 3 følgende krav:*

1. *$L_n(q; x_1, \ldots, x_q)$ er et homogent polynomium af grad n og $\triangle L_n = 0$.*

2. *For alle $A \in J_{q,\varepsilon_q}$ gælder at $L_n(q; Ax) = L_n(q; x)$.*

3. *$L_n(q; \varepsilon_q) = 1$.*

$L_n(q; x)$ er specifikt givet ved:

$$L_n(q; x) = n!\Gamma(\frac{q-1}{2}) \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \left(-\frac{1}{4}\right)^l \frac{x_{(q-1)}^{2l} x_q^{n-2l}}{l!(n-2l)!\Gamma(\frac{q-1}{2}+l)} \tag{25}$$

Da $L_n(q;x)$ er et homogent polynomium gælder, med notationen fra (5), at $L_n(q,x) = L_n(q;r\xi_{(q)}) = r^n L_n(q;t\varepsilon_q + \sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)})$. Men da $\xi_{(q-1)} \in S^{q-2}$ gælder at $\xi^2_{(q-1)} = 1$ og så følger

$$L_n(q;x) = r^n L_n(q;t\varepsilon_q + \sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)}) = r^n n!\Gamma(\tfrac{q-1}{2}) \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \left(-\tfrac{1}{4}\right)^l \frac{(\sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)})^{2l}(t\varepsilon_q)^{n-2l}}{l!(n-2l)!\Gamma(\frac{q-1}{2}+l)}$$
$$= r^n n!\Gamma(\tfrac{q-1}{2}) \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \left(-\tfrac{1}{4}\right)^l \frac{(1-t^2)^l t^{n-2l}}{l!(n-2l)!\Gamma(\frac{q-1}{2}+l)}$$

Dette polynomium bruges nu til at definere Legendre polynomiet.

Definition 3.3 (Legendre polynomiet) *Med $P_n(q;\cdot) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ givet ved*

$$P_n(q;t) = n!\Gamma(\frac{q-1}{2}) \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \left(-\frac{1}{4}\right)^l \frac{(1-t^2)^l t^{n-2l}}{l!(n-2l)!\Gamma(\frac{q-1}{2}+l)} \tag{26}$$

defineres Legendre polynomiet af orden n i q dimensioner.

Det ses at enhver kuglefunktion, $Y \in \mathcal{Y}_n(q)$ af grad n der er invariant mht. J_{q,ε_q} må være givet ved en konstant gange $L_n(q;\xi)$ og denne konstant må være kuglefunktionens værdi i ε_q. Altså $Y(\xi) = Y(\varepsilon_q)L_n(q;\xi) = Y(\varepsilon_q)P_n(q;t)$.
Men hvis vi nu betragter en kuglefunktion der er invariant mht. isotropigruppen for et vilkårligt element, $\alpha \in S^{q-1}$, vil der kunne bestemmes en ny ortonormal basis, $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_q'$ hvor α kan opfattes som nordpolen på kuglen. Altså hvor der gælder $\alpha = \varepsilon_q'$. I denne nye basis kan der med helt samme ovevejelser som ovenfor findes en funktion tilsvarende $L_n(q;\xi)$ og en fremstilling for den givne kuglefunktion der er invariant mht. $J_{q,\alpha}$. Parameteren t vil blive erstattet af $\xi \cdot \alpha$. Dette resultat bruges senere i mange udregninger og formuleres derfor som et lemma.

Lemma 3.4 *Antag at $Y \in \mathcal{Y}_n(q)$ er invariant mht. $J_{q,\alpha}$. Så gælder for alle $\xi \in S^{q-1}$*

$$Y(\xi) = Y(\alpha)P_n(q;\alpha\cdot\xi) \tag{27}$$

Fra lemmaet følger også

Sætning 3.5 *Underrummet af $\mathcal{Y}_n(q)$ der består af elementer der er invariante mht. $J_{q,\alpha}$, for $\alpha \in S^{q-1}$, har dimension en.*

Bevis: For hvert underrum af $\mathcal{Y}_n(q)$, bestående af elementer der er invariante mht. $J_{q,\alpha}$ er der nu ifølge lemma 3.4 givet en endimensional basis ved $\xi \mapsto P_n(q; \alpha \cdot \xi)$.

$\square$

Sætning 3.6 (Additionssætningen) *Antag at $Y_j, j \in \{1, \dots, N(q,n)\}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{Y}_n(q)$, så gælder, for alle $\xi, \eta \in S^{q-1}$, at*

$$\sum_{j=1}^{N(q,n)} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\eta)} = \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} P_n(q; \xi \cdot \eta) \tag{28}$$

Bevis: For givet $A \in O_{(q)}$ og Y_k i den givne basis findes koeficienter, $U_k^j(A)$ så

$$Y_k(A\xi) = \sum_{j=1}^{N(q,n)} U_k^j(A) Y_j(\xi)$$

Alle disse $U_k^j(A)$ danner nu en $N(q,n) \times N(q,n)$ matrix. Da integralet over enhedskugleoverfladen er invariant overfor et variabel skift gælder, igen for vilkårligt $A \in O_{(q)}$,

$$\delta_{jk} =< Y_j, Y_k >= \int_{S^{q-1}} Y_j(A\xi)\overline{Y_k(A\xi)} dS^{q-1}(\xi) \quad = \tag{29}$$

$$\int_{S^{q-1}} \Big(\sum_{l=1}^{N(q,n)} U_j^l(A) Y_l(\xi) \Big) \overline{\Big(\sum_{m=1}^{N(q,n)} U_k^m(A) Y_m(\xi) \Big)} dS^{q-1}(\xi) \quad = \tag{30}$$

$$\sum_{l=1}^{N(q,n)} \sum_{m=1}^{N(q,n)} U_j^l(A)\overline{U_k^m(A)} \int_{S^{q-1}} Y_l(\xi)\overline{Y_m(\xi)} dS^{q-1}(\xi) \quad = \tag{31}$$

$$\sum_{l=1}^{N(q,n)} \sum_{m=1}^{N(q,n)} U_j^l(A)\overline{U_k^m(A)} < Y_l, Y_m >= \sum_{l=1}^{N(q,n)} U_j^l(A)\overline{U_k^l(A)} \tag{32}$$

Så der gælder at matrixen givet ved $U_k^j(A)$ er unitær, altså gælder:

$$\delta_{jk} = \sum_{l=1}^{N(q,n)} U_l^j(A)\overline{U_l^k(A)}. \tag{33}$$

Nu defineres funktionen $F : S^{q-1} \times S^{q-1} \to \mathbb{C}$ ved:

$$F(\xi, \eta) := \sum_{j=1}^{N(q,n)} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\eta)} \tag{34}$$

Så følger, for alle $A \in O_{(q)}$:

$$F(A\xi, A\eta) = \sum_{j=1}^{N(q,n)} \sum_{k=1}^{N(q,n)} \sum_{l=1}^{N(q,n)} U_j^k(A) Y_k(\xi) \overline{U_j^l(A) Y_l(\eta)} = \sum_{l=1}^{N(q,n)} Y_l(\xi)\overline{Y_l(\eta)} = F(\xi, \eta)$$

Hvis F opfattes som funktion af en variabel med ξ (hhv. η) givet, vil F være invariant mht. $J_{q,\xi}$ (hhv. $J_{q,\eta}$) og der må ifølge lemma 3.4 gælde

$$F(\xi, \eta) = F(\xi, \xi) P_n(q; \xi \cdot \eta) \tag{35}$$

$$F(\xi, \eta) = F(\eta, \eta) P_n(q; \xi \cdot \eta) \tag{36}$$

hvilket giver $F(\xi, \xi) = F(\eta, \eta)$. Men da ξ og η var vilkårligt valgt følger at $F(\xi, \xi)$ er konstant. Ved at betragte integralet af $F(\xi, \xi)$ over enhedskugleoverfladen fås vha. (34) og (36)

$$\int_{S^{q-1}} F(\xi, \xi) dS^{q-1}(\xi) = F(\xi, \xi)|S^{q-1}| = \frac{F(\xi, \eta)}{P_n(q; \xi \cdot \eta)} |S^{q-1}| \tag{37}$$

$$= \sum_{j=1}^{N(q,n)} < Y_j, Y_j >= N(q, n) \tag{38}$$

Så følger den ønskede ligning:

$$\sum_{j=1}^{N(q,n)} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\eta)} = \frac{N(q, n)}{|S^{q-1}|} P_n(q; \xi \cdot \eta) \tag{39}$$

□

Additionssætningen bruges bl.a. til at bevise at rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ er irreducible.

Definition 3.7 (Reducibelt og irreducibelt rum) *Et invariant rum, $\mathcal{L}$, kaldes reducibelt, hvis der findes et ikke trivielt invariant underrum, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$. Hvis der ikke findes nogle sådanne underrum, kaldes $\mathcal{L}$ irreducibelt.*

Sætning 3.8 (Irreducibilitet) *Hvert af rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ er irreducible.*

Bevis: Antag, for givne n og q, at $\mathcal{Y}_n(q)$ er reducibelt. Så findes et invariant underrum, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{Y}_n(q)$. Vi antager yderligere at der er givet en basis for $\mathcal{Y}_n(q)$. Hvert element i denne basis må enten tilhøre $\mathcal{L}_1$ eller det ortogonale komplement, $\mathcal{L}_2$. Da dimensionen af $\mathcal{Y}_n(q)$ (og dermed også af $\mathcal{L}_1$) er endelig, fås på denne måde en basis for $\mathcal{L}_1$ (og for $\mathcal{L}_2$).

Nu kan bestemmes $F_1 \in \mathcal{L}_1$, $F_1 : S^{q-1} \times S^{q-1} \to \mathbb{C}$ (og $F_2 \in \mathcal{L}_2$, $F_2 : S^{q-1} \times S^{q-1} \to \mathbb{C}$) på helt samme måde som $F(\xi, \eta)$ blev bestemt i beviset for additionsformlen.

$$\begin{aligned} F_1(\xi, \eta) &= F_1(\xi, \xi) P_n^{(1)}(q; \xi \cdot \eta) \\ F_2(\xi, \eta) &= F_2(\xi, \xi) P_n^{(2)}(q; \xi \cdot \eta) \end{aligned} \tag{40}$$

Så hvis $\{Y_1, \ldots, Y_{N_1}\}$ er basen for $\mathcal{L}_1$ og $\{Y_{N_1+1}, \ldots, Y_{N(q,n)}\}$ er basen for $\mathcal{L}_2$ må gælde:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\eta)} &= \frac{N_1}{|S^{q-1}|} P_n^{(1)}(q; \xi \cdot \eta) \\ \sum_{k=N_1+1}^{N(q,n)} Y_k(\xi)\overline{Y_k(\eta)} &= \frac{N(q,n) - N_1}{|S^{q-1}|} P_n^{(2)}(q; \xi \cdot \eta) \end{aligned}$$

Så følger fra ortogonaliteten af $\mathcal{L}_1$ og $\mathcal{L}_2$ at

$$\int_{S^{q-1}} P_n^{(1)}(q; \xi \cdot \eta) P_n^{(2)}(q; \xi \cdot \eta) dS^{q-1}(\eta) = 0. \tag{41}$$

Men da de $P_n^{(1)}(q; \xi \cdot \eta)$ og $P_n^{(2)}(q; \xi \cdot \eta)$ der optræder i fremstillingen af F_1 og F_2 begge stammer fra lemma 3.4, må de være den samme funktion, nemlig Legendre polynomiet, $P_n(q, t)$. F_j kan jo stadig opfattes som funktion i hele $\mathcal{Y}_n(q)$ med ξ hhv. η givet. Så nu skal det bare vises at $\int_{S^{q-1}} \big(P_n(q; \xi \cdot \eta)\big)^2 dS^{q-1} \neq 0$. Dette følger af additions sætningen (sætning 3.6):

$$\int_{S^{q-1}} P_n^2(q; \xi \cdot \eta) dS^{q-1}(\eta) = \tag{42}$$

$$\Big(\frac{|S^{q-1}|}{N(q,n)}\Big)^2 \int_{S^{q-1}} \Big(\sum_{J=1}^{N(q,n)} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\eta)} \Big) \overline{\Big(\sum_{k=1}^{N(q,n)} Y_k(\xi)\overline{Y_k(\eta)} \Big)} dS^{q-1}(\eta) = \tag{43}$$

$$\Big(\frac{|S^{q-1}|}{N(q,n)}\Big)^2 \sum_{j=1}^{N(q,n)} Y_j(\xi)\overline{Y_j(\xi)} = \Big(\frac{|S^{q-1}|}{N(q,n)}\Big)^2 F(\xi, \xi) = \frac{|S^{q-1}|}{N(q,n)} > 0 \tag{44}$$

Så rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ er irreducible.

$\square$

Så $\mathcal{Y}_n(q)$ er både irreducibelt og invariant.
Nu indføres projektion af elementer i $L^2(S^{q-1})$ på $\mathcal{Y}_n(q)$ helt sædvanligt vha. det indre produkt.

Definition 3.9 (Projektions operatoren) *For $f \in L^2(S^{q-1})$ defineres projektionen af f på $\mathcal{Y}_n(q)$ ved:*

$$(\mathbb{P}_n(q)f)(\xi) := \sum_{j=1}^{N(q,n)} < f, Y_j > Y_j(\xi) = \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} \int_{S^{q-1}} P_n(q; \xi \cdot \eta) f(\eta) dS^{q-1}(\eta) \tag{45}$$

Hvor det sidste lighedstegn følger af additionssætningen (sætning 3.6) og hvor Y_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ antages at være en ortonormal basis for $\mathcal{Y}_n(q)$.

Lemma 3.10 *Hvis $\mathcal{L} \subset C(S^{q-1})$ er et invariant funktionsrum gælder at rummet*

$$\mathbb{P}_n(q)\mathcal{L} := \{g | g \in \mathbb{P}_n(q)f, f \in \mathcal{L}\} \tag{46}$$

er invariant.

Bevis: Givet et $A \in O_{(q)}$ og et $g \in \mathbb{P}_n(q)\mathcal{L}$ findes et $f \in \mathcal{L}$ så $g = \mathbb{P}_n(q)f$. Så følger, med koordinatskiftet $\eta \to A\eta$, da integralet over enhedskugleoverfladen er invariant mht. et variabelskift:

$$g_A(\xi) = (\mathbb{P}_n(q)f)_A(\xi) = \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} \int_{S^{q-1}} P_n(q; A\xi \cdot \eta) f(\eta) dS^{q-1}(\eta) = \tag{47}$$

$$\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} \int_{S^{q-1}} P_n(q; A\xi \cdot A\eta) f(A\eta) dS^{q-1}(A\eta) = (\mathbb{P}_n(q)f_A)(\xi)$$

Men da $\mathcal{L}$ er invariant gælder at $f_A \in \mathcal{L}$, så der findes et $h \in \mathbb{P}_n(q)\mathcal{L}$ så $h = \mathbb{P}_n(q)f_A$. Men så gælder at $h = g_A$, så $\mathbb{P}_n(q)\mathcal{L}$ er invariant.

□

Sætning 3.11 *Hvis $\mathcal{L}$ er et invariant og irreducibelt underrum af $C(S^{q-1})$ så gælder enten $\mathcal{L} \perp \mathcal{Y}_n(q)$ eller at $\mathbb{P}_n(q)$ er en bijektion af $\mathcal{L}$ på $\mathcal{Y}_n(q)$.*

Bevis: Antag at $\mathcal{L}$ ikke er ortogonal på $\mathcal{Y}_n(q)$. Så følger fra lemma 3.10 at $\mathbb{P}_n(q)\mathcal{L}$ er invariant, og da $\mathcal{Y}_n(q)$ er irreducibelt kan $\mathbb{P}_n(q)\mathcal{L}$ ikke være et ægte underrum. Så $\mathbb{P}_n(q)\mathcal{L} = \mathcal{Y}_n(q)$ og $\mathbb{P}_n(q) : \mathcal{L} \to \mathcal{Y}_n(q)$ er surjektiv. Hvis $\mathbb{P}_n(q)$ ikke er injektiv vil $\ker \mathbb{P}_n(q)$ være ikke triviel. Dette ikke trivielle underrum af $\mathcal{L}$ vil være invariant da $(\mathbb{P}_n(q)f_A)(\xi) = (\mathbb{P}_n(q)f)_A(\xi)$, i modstrid med at $\mathcal{L}$ er irreducibelt.

$\square$

Korollar 3.12 *Kuglefunktioner af forskellig grad er ortogonale. Altså*

$$\mathcal{Y}_n(q) \perp \mathcal{Y}_m(q), \qquad \text{når } n \neq m$$

Bevis: Da rummene af kuglefunktioner af forskellig grad har forskellig dimension, må de være ortogonale ifølge sætning 3.11.

$\square$

Da $P_n(q;t)$ optræder igen og igen i beskrivelsen af kuglefunktionerne viser det sig nyttigt at indføre andre repræsentationer af $P_n(q;t)$. Her følger 3.

3.1 Rodrigues fremstilling

Ortogonaliteten af rummene $\mathcal{Y}_n(q)$, $\mathcal{Y}_m(q)$ for $n \neq m$ vist i korollar 3.12 kan bruges til en beskrivelse og konstruktion af $P_n(q;t)$. Da $\mathcal{Y}_n(q) \perp \mathcal{Y}_m(q)$ for $n \neq m$ gælder $\int_{S^{q-1}} L_n(q;\xi)L_m(q;\xi)dS^{q-1}(\xi) = 0$. Men $L_n(q;\xi)$ kan på enhedskugleoverfladen erstattes af $P_n(q;t)$, og integralet kan vha. overvejelserne omkring (5) ændres til et integral over S^{q-2} og t. Altså:

$$\int_{S^{q-1}} L_n(q;\xi)L_m(q;\xi)dS^{q-1}(\xi) = \int_{S^{q-2}} \Big(\int_{-1}^{+1} P_n(q;t)P_m(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt\Big)dS^{q-2}(\xi)$$

$$= |S^{q-2}| \int_{-1}^{+1} P_n(q;t)P_m(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = 0 \qquad \text{for } n \neq m \tag{48}$$

Ved (48) er givet en betingelse for $P_n(q;t)$, der sammen med $P_n(q;1) = 1$ kan bruges til at give følgende fremstilling af $P_n(q;t)$.

Sætning 3.13 (Rodrigues repræsentation) *Der gælder*

$$P_n(q;t) = (-1)^n R_n(q)(1-t^2)^{\frac{3-q}{2}}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}} \tag{49}$$

hvor Rodrigues konstant, $R_n(q)$, er givet ved

$$R_n(q) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \frac{\Gamma(\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})} \tag{50}$$

Bevis: Det skal vises at ovenstående fremstilling af $P_n(q;t)$ opfylder

$$\int_{-1}^{+1} P_n(q;t)P_m(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = 0$$

for $n \neq m$ og $P_n(q;1) = 1$.
Da $(-1)^n R_n(q)$ er en konstant for givet n og q betragtes, for at lette notationen, k'te grads polynomiet $p_k = (1-t^2)^{\frac{3-q}{2}}\left(\frac{d}{dt}\right)^k(1-t^2)^{k+\frac{q-3}{2}}$. Det skal altså vises at for $n \neq m$ gælder $\int_{-1}^{+1} p_n(t)p_m(t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = 0$. Dette vises ved partiel integration, hvor det benyttes at for $n > k \geq m$, $f \in C^k[-1,1]$ gælder

$$\left[f^{(k)}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-k}(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}\right]_{-1}^{+1} = 0 \tag{51}$$

Så ses, for $n > m$, da $p_m^{(m+1)}(t) = 0$

$$\int_{-1}^{+1} p_m(t)p_n(t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = \int_{-1}^{+1} p_m(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^n(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}dt = \tag{52}$$

$$\left[p_m(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} p_m^{(1)}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}dt \tag{53}$$

$$= \cdots = (-1)^{m+1}\int_{-1}^{+1} p_m^{(m+1)}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-(m+1)}(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}dt = 0 \tag{54}$$

At $P_n(q;1) = 1$ kan f.eks. vises ved at erstatte t med $1-s$ og betragte konstanten i fremstillingen af $p_n(1-s)$ for $s = 0$, der svare til $t = 1$. Se f.eks. [2] s. 22 for detaljer. Man finder at $p_n(1) = (-2)^n\frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(\frac{q-1}{2})} = \Big((-1)^n R_n(q)\Big)^{-1}$, så der gælder $P_n(q;1) = 1$ også i Rodrigues repræsentationen.

□

Lemma 3.14 *Hvis $f \in C^n[-1,1]$ så gælder der*

$$\int_{-1}^{+1} f(t)P_n(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = R_n(q)\int_{-1}^{+1} f^{(n)}(t)(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}dt \tag{55}$$

Bevis: Da der stadig gælder (51) ses ved partiel integration

$$\int_{-1}^{+1} f(t)P_n(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = (-1)^n R_n(q)\int_{-1}^{+1} f(t)p_n(t)dt = \tag{56}$$

$$(-1)^n R_n(q)\Big([f(t)(\frac{d}{dt})^{n-1}(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f^{(1)}(t)(\frac{d}{dt})^{n-1}(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}dt\Big)$$

$$= \cdots = R_n(q)\int_{-1}^{+1} f^{(n)}(t)(1-t^2)^{n+\frac{q-3}{2}}dt \tag{57}$$

□

3.2 Laplaces første integral

$P_n(q;t)$ kan også gives på integral form, vha. Laplaces første integral. For givet $\eta_{(q-1)} \in S^{q-2}$ defineres i q dimensioner $a \in \mathbb{C}^q$ ved

$$a := \varepsilon_q + i\eta_{(q-1)} \tag{58}$$

Fra a konstrueres nu et n'te grads polynomium, $x \mapsto (x \cdot a)^n$. Det ses at $\triangle(x \cdot a)^n = 0$ er opfyldt ved at betragte, for $n \geq 2$,

$$\triangle(x \cdot a)^n = a^2 \sum_{j=1}^{q} n(n-1)(x \cdot a)^{n-2} \tag{59}$$

Da $a^2 = 0$ pr. definition gælder altså $\triangle(x \cdot a)^n = 0$.
Så det ses at

$$L_n(x) := \frac{1}{|S^{q-2}|} \int_{S^{q-2}} (x \cdot a)^n dS^{q-2}(\eta) = \frac{1}{|S^{q-2}|} \int_{S^{q-2}} (x_q + ix_{(q-1)}\eta_{(q-1)})^n dS^{q-2}(\eta) \tag{60}$$

er et homogent polynomium der opfylder $\triangle L_n(x) = 0$. Dette var det første krav der blev stillet til funktionen i sætning 3.2.
Det andet krav, at $L_n(Ax) = L_n(x)$ for alle $A \in J_{q,\varepsilon_q}$ ses også opfyldt, da integralet er invariant overfor et variabel skift.
Det 3. krav er også opfyldt, da $L_n(\varepsilon_q) = \frac{1}{|S^{q-2}|} \int_{S^{q-2}} 1^n dS^{q-2} = 1$.
Så følger, med samme overvejelser som blev brugt første gang Legendre polynomiet blev indført at $L_n(\xi) = \frac{1}{|S^{q-2}|} \int_{S^{q-2}} (t + i\sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)}\eta_{(q-1)})^n dS^{q-2}(\eta)$. Altså kan Legendre polynomiet nu gives ved Laplaces første integral.

Sætning 3.15 (Laplaces første integral) *For q, n og $t \in [-1,1]$ er Legendre polynomiet givet ved:*

$$P_n(q;t) = \frac{|S^{q-3}|}{|S^{q-2}|} \int_{-1}^{+1} (t + is\sqrt{1-t^2})^n (1-s^2)^{\frac{q-4}{2}} ds \tag{61}$$

3.3 Legendre polynomiet som løsning til differential ligning

Det kan vises, ved at betragte koeficienterne til hver potens af t i fremstillingen af $P_n(q;t)$ givet ved (26), at der gælder følgende lemma. (Se f.eks. [2] s. 38.)

Lemma 3.16 *$P_n(q;t)$ løser Legendre differential ligningen, givet ved*

$$\left[(1-t^2)^{\frac{3-q}{2}} \frac{d}{dt}(1-t^2)^{\frac{q-1}{2}} \frac{d}{dt} + n(n+q-2)\right] P_n(q;t) = 0 \tag{62}$$

4 Legendre polynomiet som hypergeometrisk funktion

Definition 4.1 (Hypergeometriske funktioner) *De hypergeometriske funktioner indføres som løsninger til den hypergeometriske differential ligning*

$$\Big[z(1-z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 + [c-(a+b+1)z]\frac{d}{dz} - ab\Big]f(z) = 0 \tag{63}$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{C}$.

I [2] §36 vises at med $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ er

$${}_2F_1(a,b,c;z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j}\frac{z^j}{j!} \tag{64}$$

løsninger til (63) for $|z| < 1$ når $c \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$. Der gælder desuden ${}_2F(a,b,c;0) = 1$.

Fra lemma 3.16 vides at Legendre polynomierne er løsninger til differential ligningen givet i lemmaet. Med $(1-t^2)^{\frac{3-q}{2}}\frac{d}{dt}(1-t^2)^{\frac{q-1}{2}}\frac{d}{dt} = (1-t^2)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2 - (q-1)t\frac{d}{dt}$ fås altså for $t \in [-1,1]$

$$\Big[(1-t^2)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2 - (q-1)t\frac{d}{dt} + n(n+q-2)\Big]P_n(q;t) = 0 \tag{65}$$

Med $t = 1-2z$ fås nu for $z \in [0,1]$

$$\Big[z(1-z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{q-1}{2} - (q-1)z\Big)\frac{d}{dz} + n(n+q-2)\Big] \tag{66}$$

eller

$$\Big[z(1-z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{q-1}{2} - (-n+(n+q-2)+1)z\Big)\frac{d}{dz} - (-n)(n+q-2)\Big] \tag{67}$$

Så det ses at løsninger til Legendre differential ligningen er løsninger til den hypergeometriske ligning, med konstanterne a, b og c givet ved:

$$a = -n \quad b = n+q-2 \quad c = \frac{q-1}{2} \tag{68}$$

Det følger med $t = 1-2z$ at $P_n(q;1-2z) = 1$ for $z = 0$ og derfor gælder

$$P_n(q,t) = {}_2F_1\Big(-n, n+q-2, \frac{q-1}{2}; \frac{1-t}{2}\Big) \tag{69}$$

Der findes, både i appendix af [2], og generelt i litteraturen masser af transformations regler for hypergeometriske funktioner og disse regler kan altså også benyttes på Legendre polynomierne. Disse transformationer vil dog ikke blive behandlet i dette projekt.

5 Rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ udspænder $L^2(S^{q-1})$

For at vise at rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ udspænder $L^2(S^{q-1})$, vises at $\mathcal{Y}_n(q)$ ligger tæt i $C(S^{q-1})$ da det vides at $C(S^{q-1})$ ligger tæt i $L^2(S^{q-1})$.
For at vise dette indføres følgende operator:

Definition 5.1 *For $f \in C(S^{q-1})$ defineres $\Pi_n(q)f : S^{q-1} \to \mathbb{C}$ ved*

$$(\Pi_n(q)f)(\xi) := E(q,n) \int_{S^{q-1}} \Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n f(\eta) dS^{q-1}(\eta) \tag{70}$$

hvor $E(q,n)$ er givet ved

$$E(q,n) = \Big(\frac{1}{4\pi}\Big)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\Gamma(n+q-1)}{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})} \tag{71}$$

Sætning 5.2 *Der gælder uniformt, for $f \in C(S^{q-1})$,*

$$\lim_{n\to\infty} (\Pi_n(q)f)(\xi) = f(\xi). \tag{72}$$

Bevis: Først betragtes følgende integral, hvor omskrivningen: $\xi\cdot\eta = t = 2x-1$ benyttes, samt Eulers Beta integral (se f.eks. [2] s. 197 lemma 1).

$$\int_{S^{q-1}} \Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n dS^{q-1}(\eta) = |S^{q-1}| \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{1+t}{2}\Big)^n (1-t^2)^{\frac{q-3}{2}} dt = \tag{73}$$

$$|S^{q-1}| \int_0^1 x^n (1-x)^{\frac{q-3}{2}} (4x)^{\frac{q-3}{2}} 2dx = 2^{q-2}|S^{q-1}| \int_0^1 x^{n+\frac{q-1}{2}-1}(1-x)^{\frac{q-1}{2}-1} dx =$$

$$2^{q-1} \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma(\frac{q-1}{2})} \frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})\Gamma(\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+\frac{q-1}{2}+\frac{q-1}{2})} = 2^{q-1}\pi^{\frac{q-1}{2}} \frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+q-1)} = \big(E(q,n)\big)^{-1} \tag{74}$$

Fra ovenstående fås nu

$$(\Pi_n(q)f)(\xi) = f(\xi) + E(q,n) \int_{S^{q-1}} \Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n \big(f(\eta) - f(\xi)\big) dS^{q-1}(\eta). \tag{75}$$

Med approximationen af Γ fra [2] (§ 35.31) fås følgende approximation af $E(q,n)$ for $n \to \infty$

$$E(q,n) \sim \Big(\frac{1}{4\pi}\Big)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+q-1-\frac{1}{2}} e^{-n}}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{q-1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-n}} = \Big(\frac{1}{4\pi}\Big)^{\frac{q-1}{2}} n^{\frac{q-1}{2}} \tag{76}$$

For $\xi\cdot\eta \le 1-\delta < 1$ gælder

$$0 \le \Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n \le \Big(\frac{1+1-\delta}{2}\Big)^n = \Big(1-\frac{\delta}{2}\Big)^n \tag{77}$$

så da $0 \leq E(q,n)\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n$ følger det med (76) at for $\xi \cdot \eta < 1$ gælder:

$$\lim_{n\to\infty} E(q,n)\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n = 0 \tag{78}$$

Da f er kontinuert på en begrænset mængde, S^{q-1}, er f uniformt kontinuert, og der findes, for givet $\delta \in [0,1]$, et $\omega(\delta)$, der opfylder at $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$ og

$$|f(\xi) - f(\eta)| < \omega(\delta) \text{ for } 1-\delta \leq \xi\cdot\eta \leq 1 \tag{79}$$

for alle $\xi, \eta \in S^{q-1}$.

Samtidig vides at f er begrænset, da f er en kontinuert funktion på en kompakt mængde. Så der findes et M, så der for alle $\xi, \eta \in S^{q-1}$, gælder:

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq M \tag{80}$$

Tilhørende givet $\delta \in [0,1]$ opsplittes enhedskugleoverfladen, S^{q-1}, nu i to dele, nemlig

$$S_+^{q-1}(\xi) := \{\eta \in S^{q-1} | \xi\cdot\eta \geq 1-\delta\} \tag{81}$$

$$S_-^{q-1}(\xi) := \{\eta \in S^{q-1} | \xi\cdot\eta < 1-\delta\} \tag{82}$$

Nu følger fra (75), (79) og (80) for givet $\delta \in [0,1]$

$$\|(\Pi_n(q)f)(\xi) - f(\xi)\|_{\text{sup}} = \tag{83}$$

$$\|E(q,n)\int_{S^{q-1}}\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n\big(f(\eta)-f(\xi)\big)dS^{q-1}(\eta)\|_{\text{sup}} \leq \tag{84}$$

$$\|\int_{S_+^{q-1}(\xi)}|E(q,n)\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n\big(f(\eta)-f(\xi)\big)|dS^{q-1}(\eta)+ \tag{85}$$

$$\int_{S_-^{q-1}}|E(q,n)\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n\big(f(\eta)-f(\xi)\big)|dS^{q-1}(\eta)\|_{\text{sup}} \leq \tag{86}$$

$$\|\omega(\delta)E(q,n)\int_{S^{q-1}}\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n dS^{q-1}(\eta)+ \tag{87}$$

$$\int_{S_-^{q-1}}|E(q,n)M\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n dS^{q-1}(\eta)\|_{\text{sup}} \leq \tag{88}$$

$$\omega(\delta) + |S^{q-1}|E(q,n)M\Big(1-\frac{\delta}{2}\Big)^n \to \omega(\delta) \text{ for } n\to\infty \tag{89}$$

Altså gælder $\lim_{n\to\infty}\|(\Pi_n(q)f)(\xi) - f(\xi)\|_{\text{sup}} \leq \omega(\delta)$. Da $\omega(\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$ følger sætningens resultat.

□

Så ovenstående viser at enhver kontinuert funktion, $f \in C(S^{q-1})$, kan tilnærmes uniformt med $\Pi_n(q)$. Dette viser i sig selv dog ikke det ønskede, men med følgende lemma ses at rummene $\mathcal{Y}_n(q)$ ligger tæt i $C(S^{q-1})$.

Lemma 5.3 *Med $\mu_n^k(q)$ givet ved*

$$\mu_n^k(q) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(n+q-2)!}{(n+k+q-2)!} \tag{90}$$

gælder

$$(\Pi_n(q)f)(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \mu_n^k(q)(\mathbb{P}_k(q)f)(\xi) \tag{91}$$

Bevis: Betragt først, med lemma 3.14, for $n \geq k$

$$A := \int_{S^{q-1}} (1+\xi\cdot\eta)^n P_k(q;\xi\cdot\eta)dS^{q-1}(\xi) = \tag{92}$$

$$|S^{q-2}|\int_{-1}^{+1}(1+t)^n P_k(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = \tag{93}$$

$$|S^{q-2}|R_k(q)\int_{-1}^{+1}\frac{n!}{(n-k)!}(1+t)^{n-k}(1-t^2)^{k+\frac{q-3}{2}}dt \tag{94}$$

Med $t = 2x-1$ fås, tilsvarende udregningen for sætning 5.2,

$$A = |S^{q-2}|R_k(q)\frac{n!}{(n-k)!}\int_0^1 (2x)^{n-k}\Big(4x(1-x)\Big)^{k+\frac{q-3}{2}}2dx = \tag{95}$$

$$|S^{q-2}|R_k(q)2^{n+k+q-2}\frac{n!}{(n-k)!}\int_0^{+1} x^{n+\frac{q-1}{2}-1}(1-x)^{k+\frac{q-1}{2}-1}dx = \tag{96}$$

$$|S^{q-2}|R_k(q)2^{n+k+q-2}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})\Gamma(k+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+k+q-1)} = \tag{97}$$

$$2\frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma(\frac{q-1}{2})}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\frac{\Gamma(\frac{q-1}{2})}{\Gamma(k+\frac{q-1}{2})}2^{n+k+q-2}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})\Gamma(k+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+k+q-1)} = \tag{98}$$

$$2^{n+q-1}\pi^{\frac{q-1}{2}}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+k+q-1)} \tag{99}$$

Med disse udregninger ses at

$$E(q,n)\int_{-1}^{+1}\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}P_k(q;\xi\cdot\eta)dS^{q-1}(\xi) = \tag{100}$$

$$\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}\Big(\frac{1}{4\pi}\Big)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\Gamma(n+q-1)}{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n}2^{n+q-1}\pi^{\frac{q-1}{2}}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\Gamma(n+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(n+k+q-1)} =$$

$$\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\Gamma(n+q-2+1)}{\Gamma(n+k+q-2+1)} = \tag{101}$$

$$\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(n+q-2)!}{(n+k+q-2)!} = \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}\mu_n^k(q) \tag{102}$$

Alle polynomier af grad n kan gives entydigt ved deres projektion på alle $P_k(q;\cdot)$ med $k \in \{0\ldots,n\}$, da $P_k(q;\cdot) \perp P_j(q;\cdot)$ for $k \neq j$. Med dette følger nu at

$$E(q,n)\Big(\frac{1+\xi\cdot\eta}{2}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\mu_n^k(q)\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}P_k(q;\xi\cdot\eta) \tag{103}$$

og så følger trivielt det ønskede:

$$E(q,n)\int_{S^{q-1}}\left(\tfrac{1+\xi\cdot\eta}{2}\right)^n f(\eta)dS^{q-1}(\eta) = \tag{104}$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n}\mu_n^k(q)\frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|}\int_{S^{q-1}}P_k(q;\xi\cdot\eta)f(\eta)dS^{q-1}(\eta) \tag{105}$$

$\square$

Med $\mu_n^k(q)$ givet ved (90) ses det at $\mu_n^k < \mu_{n+1}^k$ og at $\lim_{n\to\infty}\mu_n^k(q) = 1$. Altså, med alt det foregående i dette afsnit kan nu formuleres følgende sætning.

Sætning 5.4 *For $f \in C(S^{q-1})$ gælder uniformt*

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu_n^k(q)(\mathbb{P}_k(q)f)(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{P}_k(q)f)(\xi). \tag{106}$$

Da projektionerne på alle $\mathcal{Y}_k(q)$ mht. supremumsnormen ligger tæt i $C(S^{q-1})$ følger at rummene $\mathcal{Y}_k(q)$ ligger tæt i $C(S^{q-1})$ mht. 2 normen, og heraf følger, da $C(S^{q-1})$ ligger tæt i $L^2(S^{q-1})$, at rummet udspændt af alle $\mathcal{Y}_k(q)$ ligger tæt i $L^2(S^{q-1})$ og altså udspænder $L^2(S^{q-1})$.

6 Funk-Heckes sætning

Sætning 6.1 *[Funk-Heckes sætning] Antag at* $\alpha \in S^{q-1}$, $Y \in \mathcal{Y}_n(q)$ *og* $f \in C([-1,1])$. *Så gælder*

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{S^{q-1}} f(\alpha \cdot \xi) Y(\xi) dS^{q-1}(\xi) = \lambda Y(\alpha), \quad \textit{hvor} \\ \lambda = |S^{q-2}| \textstyle\int_{-1}^{+1} P_n(q;t) f(t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}} dt \end{aligned} \tag{107}$$

Bevis: Antag at $f \in C([-1,1])$. Så gælder at $f(\alpha\cdot) \in C(S^{q-1})$ for givet $\alpha \in S^{q-1}$ og at $f(\alpha\cdot)$ er invariant mht. alle $A \in J_{q,\alpha}$. Da nu $\mathbb{P}_n(q)f$ er invariant mht. $J_{q,\alpha}$ følger fra lemma 3.4 og definitionen af projektionsoperatoren at

$$(\mathbb{P}_n(q)f)(\xi) = \tag{108}$$

$$(\mathbb{P}_n(q)f)(\alpha) P_n(q;\alpha\cdot\xi) = \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} \int_{S^{q-1}} P_n(q;\xi\cdot\eta) f(\alpha\cdot\eta) dS^{q-1}(\eta) \tag{109}$$

Nu sættes $\lambda \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} = (\mathbb{P}_n(q)f)(\alpha)$, og hver af leddene i (109) multipliceres med $Y(\xi)$ fra $\mathcal{Y}_n(q)$ og der integreres over ξ. For det venstre led fås

$$\int_{S^{q-1}} \lambda \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} Y(\xi) P_n(q;\alpha\cdot\xi) dS^{q-1}(\xi) = \lambda Y(\alpha) \tag{110}$$

da projektionen af $Y(\xi)$ på $\mathcal{Y}_n(q)$ er triviel. For højre side fås, da det oplagt er tilladt at bytte om på integrationsrækkefølgen ifølge Fubinis sætning (se f.eks. [1] sætning 6.12), følgende

$$\textstyle\int_{S^{q-1}} Y_n(\xi) \int_{S^{q-1}} \frac{N(q,n)}{|S^{q-1}|} P_n(q;\xi\cdot\eta) f(\alpha\cdot\eta) dS^{q-1}(\eta) dS^{q-1}(\xi) = \tag{111}$$

$$\textstyle\int_{S^{q-1}} Y_n(\eta) f(\alpha\cdot\eta) dS^{q-1}(\eta) \tag{112}$$

Så mangler bare at vise at λ har den ønskede form.

$$\lambda = \frac{|S^{q-1}|}{N(q,n)} (\mathbb{P}_n(q)f)(\alpha) = \int_{S^{q-1}} P_n(q,\alpha\cdot\eta) f(\alpha\cdot\eta) dS^{q-1}(\eta) \tag{113}$$

Da dette integral ikke afhænger specifikt af α kan vælges at sætte $\alpha = \varepsilon_q$ for at lette udregningerne.

$$\lambda = |S^{q-2}| \int_{-1}^{+1} P_n(q;t) f(t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}} dt$$

□

7 De associerede kuglefunktioner

7.1 De associerede Legendre funktioner

Til konstruktionen af de associerede kuglefunktioner skal bruges de associerede Legendre funktioner. Det der egentligt søges er funktioner, $A_n^j(q,\cdot):[-1,1]\to\mathbb{R}$, der opfylder

$$\int_{-1}^{+1} A_n^j(q,t)A_m^j(q,t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = \delta_{n,m} \tag{114}$$

Det viser sig dog at det polynomium, A_n^j, der søges, er proportionalt med den associerede Legendre funktion af samme grad, P_n^j, og da proportionalitetskonstanten ikke er helt triviel vil vi starte med at arbejde med P_n^j.

Definition 7.1 (De associerede Legendre funktioner) *For givet dimension, q, defineres den associerede Legendre funktion af grad n og orden j, $P_n^j(q;\cdot):[-1,1]\to\mathbb{R}$, ved*

$$P_n^j(q,t) := \frac{|S^{q-3}|}{|S^{q-2}|}i^{-j}\int_{-1}^{+1}(t+is\sqrt{1-t^2})^n P_j(q-1;s)(1-s^2)^{\frac{q-4}{2}}ds \tag{115}$$

Lemma 7.2 *For givet q og $n\geq j\geq 0$ gælder følgende sammenhæng mellem den associerede Legendre funktion i q dimensioner af grad n og orden j og Legendre polynomiet i $q+2j$ dimensioner og grad $n-j$:*

$$P_n^j(q;t) = \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{n!}{(n-j)!}\frac{\Gamma(\frac{q-1}{2})}{\Gamma(j+\frac{q-1}{2})}(1-t^2)^{\frac{j}{2}}P_{n-j}(q+2j;t) \tag{116}$$

Bevis: Med brug af lemma 3.14 ses at

$$P_n^j(q;t) = \frac{|S^{q-3}|}{|S^{q-2}|}i^{-j}R_j(q-1)\frac{n!}{(n-j)!}(i\sqrt{1-t^2})^j\int_{-1}^{+1}(t+is\sqrt{1-t^2})^{n-j}(1-s^2)^{j+\frac{q-4}{2}}ds \tag{117}$$

Fra dette følger, fra Laplaces første integral (sætning 3.15), og (6)

$$P_n^j(q;t) = \tfrac{|S^{q-3}|}{|S^{q-2}|}R_j(q-1)\tfrac{n!}{(n-j)!}(1-t^2)^{\frac{j}{2}}\tfrac{|S^{q+2j-2}|}{|S^{q+2j-3}|}P_{n-j}(q+2j;t) = \tag{118}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^j\tfrac{n!}{(n-j)!}\tfrac{\Gamma(\frac{q-1}{2})}{\Gamma(j+\frac{q-1}{2})}(1-t^2)^{\frac{j}{2}}P_{n-j}(q+2j;t) \tag{119}$$

□

Så $P_n^j(q;t)$ er proportional med $(1-t^2)^{\frac{j}{2}}P_{n-j}(q+2j;t)$ og for at bestemme konstanten så (114) er opfyldt bestemmes $\int_{-1}^{+1}\Big((1-t^2)^{\frac{j}{2}}P_{n-j}(q+2j;t)\Big)^2(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt$.

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^jP_{n-j}(q+2j;t)^2(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = \tag{120}$$
$$\int_{-1}^{+1}P_{n-j}(q+2j;t)^2(1-t^2)^{\frac{q+2j-3}{2}}dt \tag{121}$$

Dette integral er identisk med følgende integral over enhedskugleoverfladen, som kan bestemmes vha. (44)

$$\frac{1}{|S^{q+2j-2}|}\int_{S^{q+2j-1}}P_{n-j}(q+2j;\xi\cdot\varepsilon_q)^2dS^{q+2j-1}(\xi) = \tag{122}$$

$$\frac{|S^{q+2j-1}|}{|S^{q+2j-2}|N(q+2j,n-j)} = \tag{123}$$

$$\frac{\Gamma(j+\frac{q-1}{2})}{\Gamma(\frac{q}{2}+j)}\frac{\sqrt{\pi}(n-j)!\Gamma(q+2j-1)}{(2n+q-2)\Gamma(n+q+j-2)} \tag{124}$$

Da der gælder $\sqrt{\pi}\Gamma(x) = 2^{x-1}\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})$ (se f.eks. [2] s. 199 lemma 3) bestemmes dette udtryk til at være

$$2^{2j+q-2}\frac{(n-j)!\Gamma(j+\frac{q-1}{2})^2}{(2n+q-2)\Gamma(n+j+q-2)} \tag{125}$$

Så med konstanter fra ovenstående udregninger defineres de normerede associerede funktioner, $A_n^j(q;t)$, nu.

Definition 7.3 *For givet q og $n \geq j \geq 0$ defineres $A_n^j : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ved:*

$$A_n^j(q;t) := \frac{\left[2^{2-q}(2n+q-2)(n-j)!(n+q+j-3)!\right]^{\frac{1}{2}}}{n!\Gamma(\frac{q-1}{2})}P_n^j(q;t) \tag{126}$$

Da A_n^j er proportional med $(1-t^2)^{\frac{j}{2}}P_{n-j}(q+2j;t)$ gælder ifølge ovenstående udregninger

$$\int_{-1}^{+1}A_n^j(q;t)A_m^j(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = \delta_{n,m} \tag{127}$$

7.2 De associerede run

Lemma 7.4 *Antag at $Y_{j,q-1}(\cdot) \in \mathcal{Y}_j(q-1)$ så gælder at $P_n^j(q;t)Y_{j,q-1}(\xi_{q-1}) \in \mathcal{Y}_n(q)$, med $\xi = t\varepsilon_q + \xi_{(q-1)}$.*

Bevis: Da der pr. definition gælder

$$P_n^j(q;t)Y_{j,q-1}(\xi_{(q-1)}) = \frac{|S^{q-3}|}{|S^{q-2}|}i^{-j}\int_{-1}^{+1}(t+is\sqrt{1-t^2})^n P_j(q-1;s)(1-s^2)^{\frac{q-4}{2}}ds Y_{j,q-1}(\xi_{(q-1)})$$

ses med fremstillingen fra Funk-Heckes sætning, (sætning 6.1) at

$$P_n^j(q;t)Y_{j,q-1}(\xi_{(q-1)}) = \frac{|S^{q-2}|}{|S^{q-3}|}\int_{S^{q-2}}(t+i\sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)}\cdot\eta_{(q-1)})^n Y_{j,q-1}(\eta_{(q-1)})dS^{q-2}(\eta)$$

Så da $(t\varepsilon_q + i\sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)}\cdot\eta_{(q-1)})^n \in \mathcal{Y}_n(q)$ for givet $\eta_{(q-1)} \in S^{q-2}$ pr. overvejelserne omkring (59) må ovenstående integral også være en funktion i $\mathcal{Y}_n(q)$.

□

Så pr. ovenstående lemma og definition 7.3 følger at $A_n^j(q;t)Y_{j,q-1}(\xi_{(q-1)}) \in \mathcal{Y}_n(q)$ med $\xi = t\varepsilon_q + \sqrt{1-t^2}\xi_{(q-1)}$ og dette giver anledning til at definere følgende operator.

Definition 7.5 *For givet q og $n \geq j \geq 0$ defineres $\mathbb{A}_n^j : \mathcal{Y}_j(q-1) \to \mathcal{Y}_n(q)$ ved*

$$(\mathbb{A}_n^j Y_{j,q-1})(\xi) := A_n^j(q;t)Y_{j,q-1}(\xi_{(q-1)}) \tag{128}$$

Operatoren $\mathbb{A}_n^j$ benyttes nu til at definere de associerede rum, $\mathcal{Y}_n^j(q)$.

Definition 7.6 (De associerede rum, $\mathcal{Y}_n^j(q)$) *For givet q og $n \geq j \geq 0$ defineres det associerede rum ved*

$$\mathcal{Y}_n^j(q) := \mathbb{A}_n^j\mathcal{Y}_j(q-1) \tag{129}$$

Det ses at $\mathcal{Y}_n^j(q) \subset \mathcal{Y}_n(q)$.

Sætning 7.7 *$\mathcal{Y}_n(q)$ er den direkte sum af $\mathcal{Y}_n^j(q)$ for $j \in \{0,1,\ldots,n\}$. Altså $\mathcal{Y}_n(q) = \bigcup_{j=0}^n \mathcal{Y}_n^j(q)$.*

Bevis: Det vises først at rummene $\mathcal{Y}_n^j(q)$ er ortogonale.
Lad $Y_n^l(\xi) = A_n^l(q;t)Y_l(\xi_{(q-1)}) \in \mathcal{Y}_n^l(q)$ og $Y_n^m(\xi) = A_n^m(q;t)Y_m(\xi_{(q-1)}) \in \mathcal{Y}_n^m(q)$ med $\xi = t\varepsilon + \xi_{(q-1)}$, $Y_l \in \mathcal{Y}_l(q-1)$ og $Y_m \in \mathcal{Y}_m(q-1)$. Så fås

$$< Y_n^l, Y_n^m > = < Y_l, Y_m > \int_{-1}^{+1} A_n^l(q;t)A_n^m(q;t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}dt = \delta_{l,m} \tag{130}$$

Altså gælder $\mathcal{Y}_n^l(q) \perp \mathcal{Y}_n^m(q)$ for $l \neq m$.
Da $\mathbb{A}_n^j : \mathcal{Y}_j(q-1) \to \mathcal{Y}_n(q)$ er en injektion er $\mathbb{A}_n^j$ en bijektion fra $\mathcal{Y}_j(q-1)$ til $\mathcal{Y}_n^j(q)$. Så $\dim(\mathcal{Y}_n^j(q)) = \dim(\mathcal{Y}_j(q-1))$.
Fra (11) følger

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} N(q,n)z^n = \frac{1+z}{(1-z)^{q-1}} = \frac{1+z}{(1-z)^{q-2}}\frac{1}{1-z} = \tag{131}$$

$$\Big(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} N(q-1,n)z^n\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\Big) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l \Big(\sum_{k=0}^{l} N(q-1,k)\Big) \tag{132}$$

Dette giver, da $\mathcal{Y}_n^l(q) \perp \mathcal{Y}_n^m(q)$ for $l \neq m$, nu

$$\dim\Big(\bigcup_{m=0}^{n} \mathcal{Y}_n^m(q)\Big) = \sum_{m=0}^{n} \dim\Big(\mathcal{Y}_n^m(q)\Big) = \sum_{m=0}^{n} \dim\Big(\mathcal{Y}_m(q-1)\Big) = \tag{133}$$

$$\sum_{m=0}^{n} N(q-1,m) = N(q,n) = \dim\Big(\mathcal{Y}_n(q)\Big) \tag{134}$$

Så da $\mathcal{Y}_n^l(q)$ og $\mathcal{Y}_n^m(q)$ er ortogonale delrum af $\mathcal{Y}_n(q)$ for $l \neq m$ og da dimensionen af $\bigcup_{m=0}^{n} \mathcal{Y}_n^m(q)$ er den samme som dimensionen af $\mathcal{Y}_n(q)$ må de to rum være ens.

$\square$

Således kan der altså findes en basis for $\mathcal{Y}_n(q)$ når bare der er givet baser for $\mathcal{Y}_k(q-1)$ for $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Specielt kan der findes ortonormale baser. Heldigvis findes der meget velkendte og velbeskrevne ortonormale baser for $\mathcal{Y}_n(2)$, givet ved de trigonometriske funktioner. Herfra kan altså generaliseres en ortonormal basis for $\mathcal{Y}_n(q)$ for vilkårlig dimension, q, og orden, n.

8 Laplace-Beltrami operatoren, $\triangle^*_{(q-1)}$

Laplace operatoren , $\triangle_{(q)}$, kan med fordel opdeles i to dele. En differentiation mht. r, radius og en differentation mht. enhedskugleoverfladen.
Det kan vises (se f.eks. [2] s. 76-78) at der gælder

$$\triangle_{(q)} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{q-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle^*_{(q-1)} = \frac{1}{r^{q-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{q-1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle^*_{(q-1)} \tag{135}$$

hvor $\triangle^*_{(q-1)}$ er Laplace-Beltrami operatoren. Tilsvarende kan det også vises at

$$\nabla_{(q)} = \vec{\xi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\nabla^*_{(q-1)} \tag{136}$$

Nu konstrueres en udvidelse af alle $f \in C(S^{q-1})$ så de er defineret på en kugleskal omkring S^{q-1}. For givet $1 > \delta > 0$, defineres f^* for alle $x \in \mathbb{R}^q$ der opfylder $1-\delta \leq |x| \leq 1+\delta$ ved

$$f^*(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) = f(\xi), \quad \text{med } x = r\xi \tag{137}$$

Specielt for $f \in C^2(S^{q-1})$ ses, da der gælder $\frac{\partial}{\partial r}f(\xi) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0$, at på enhedskugleoverfladen, altså for $|x| = 1$, fås

$$\triangle_{(q)}f^*(x) = \triangle^*_{(q-1)}f(\xi) \tag{138}$$

og for de x om hvilke der gælder $1-\delta < |x| < 1+\delta$ fås

$$\triangle_{(q)}f^*(x) = \frac{1}{r^2}\triangle^*_{(q-1)}f(\xi) \text{ og } \nabla_{(q)}f^*(x) = \frac{1}{r}\nabla^*_{(q-1)}f(\xi) \tag{139}$$

Dette bruges nu, sammen med Greens identitet til at vise følgende sætning:

Sætning 8.1 *For $f \in C^2(S^{q-1})$ og $g \in C^1(S^{q-1})$ gælder:*

$$\int_{S^{q-1}} (g \cdot \triangle^*_{(q-1)}f)dS^{q-1} = -\int_{S^{q-1}} (\nabla^*_{(q-1)}f \cdot \nabla^*_{(q-1)}g)dS^{q-1} \tag{140}$$

Bevis: Til f og g konstrueres udvidelserne f^* hhv. g^* nu tilsvarende (137) og med Greens identitet (se f.eks [3]) betragtes følgende integral.

$$\int_{1-\delta<|x|<1+\delta} (g^*(x)\cdot\triangle_{(q)}f^*(x) + \nabla g^*(x)\cdot\nabla f^*(x))dV = \int g^*(x)\nabla_{(q)}f^*(x)d\vec{n} \tag{141}$$

Det højre integral skal her forstås som integral over den indre og ydre kugleskal. Da $f^*(x)$ pr. definition er konstant i normalvektorens retning må dette integral være lig nul. Med overgang fra volumenintegral til integral over enhedskugleoverfladen og over radius, r, fås med $dV = r^{q-1}drdS^{q-1}$ at det venstre af ovenstående integraler må være givet ved

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} \int_{S^{q-1}} r^{q-1}\big(g(\xi) \cdot \frac{1}{r^2}\triangle^*_{(q-1)}f(\xi) + \frac{1}{r}\nabla^*_{(q-1)}g(\xi) \cdot \frac{1}{r}\nabla^*_{(q-1)}f(\xi)\big)dS^{q-1}(\xi)dr =$$

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} r^{q-3}\Big(\int_{S^{q-1}} \big(g(\xi) \cdot \triangle^*_{(q-1)}f(\xi) + \nabla^*_{(q-1)}g(\xi) \cdot \nabla^*_{(q-1)}f(\xi)\big)dS^{q-1}(\xi)\Big)dr = 0$$

Så følger sætningens resultat, da integralet over kugleoverfladen må kræves lig nul.

$\square$

Det vises nu at kuglefunktionerne er egenfunktioner til Laplace-Beltrami operatoren.

Definition 8.2 (Egenfunktion) *En ikke-triviel funktion, $f \in C^2(S^{q-1})$, kaldes en egenfunktion til operatoren B, med egenværdi $\lambda \in \mathbb{R}$, hvis der gælder*

$$Bf = \lambda f \tag{142}$$

Hvis der er N lineært uafhængige egenfunktioner til en givet operator kaldes N for operatorens multiplicitet.

Sætning 8.3 ($\mathcal{Y}_n(q)$ som rum af egenfunktioner til $\triangle^*_{(q-1)}$) *Rummet $\mathcal{Y}_n(q)$ er rummet af egenfunktioner til Laplace-Beltrami operatoren, $\triangle^*_{(q-1)}$, med egenværdi $n(2-n-q)$.*

Bevis: Til hvert $Y_n \in \mathcal{Y}_n(q)$ findes et harmonisk polynomium, H_n, der opfylder både $\triangle_q H_n = 0$ og $H_n(x) = r^n Y_n(\xi)$. Så der gælder:

$$\triangle_q H_n(x) = \triangle_q(r^n Y_n(\xi)) = \Big(\frac{1}{r^{q-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{q-1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle^*_{(q-1)}\Big)r^n Y_n(\xi) \tag{143}$$

$$= r^{n-2}\big(n(n+q-2) + \triangle^*_{(q-1)}\big)Y_n(\xi) = 0 \tag{144}$$

og heraf følger at

$$\triangle^*_{(q-1)}Y_n(\xi) = n(2-n-q)Y_n(\xi) \tag{145}$$

$\square$

Da der er $N(q, n)$ lineært uafhængige funktioner i $\mathcal{Y}_n(q)$ er multipliciteten af Laplace-Beltrami operatoren altså givet ved dimensionen af $\mathcal{Y}_n(q)$.

9

Litteratur

[1] Berg, Christian og Madsen, Tage Gutmann: *Mål- og integralteori*, ISBN 87-91180-15-5

[2] Müller, Claus: *Analysis of Spherical Symmetries in Euclidean Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1998, ISBN 0-387-94949-6

[3] Weisstein, Eric W. *Green's Identities.*, MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GreensIdentities.html